1. Metrische Räume

1.1. Definition: Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty[$ heißt *Metrik* auf X, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt: *Metrik*

(i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

1.2. Beispiel (Metrik):

(i) *Diskrete Metrik*: $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$ *diskrete Metrik*

(ii) $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, auf K^n ist die sog. *euklidische Metrik* als $d(x, y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ definiert, zu $1 \leq p < \infty$ heißt $d(x, y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ die *Summenmetrik* auf K^n. *euklidische Metrik* *Summenmetrik*

(iii) X Menge, $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $B^K(X) := \{f : X \to K : f \text{ beschränkt}\}$, dann ist $d(f, g) = \sup\limits_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ die *Supremumsmetrik* auf $B^K(X)$. *Supremumsmetrik*

(iv) $X \subseteq K^n$ kompakt, $C^K(X) = \{f : X \to X | f \text{ stetig}\}$, es gilt $C^K(X) \subseteq B^K(X)$ (stetige Funktionen auf einem Kompaktum beschränkt), also ist $d(f, g) = \sup\limits_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ eine Metrik auf $C^K(X)$.

1.3. Definition:

- (X, d) metrischer Raum, $x \in X$, $r > 0$. Dann heißt $B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$ *offene Kugel* um x mit Radius r. *offene Kugel*
- $U \subseteq X$ heißt *offene Menge*, falls $\forall x \in U : \exists \varepsilon_x > 0 : B(x, \varepsilon_x) \subseteq U$. *offene Menge*
- $A \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, falls $X \setminus A$ offen. *abgeschlossen*
- $K(x, r) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ heißt *abgeschlossene Kugel* um x mit Radius r. *abgeschlossene Kugel*
- $M \subseteq X$, $x \in M$ heißt *innerer Punkt* von M, falls $\exists$ offene Menge $U \subseteq X$ mit $x \in U \subseteq M$, M heißt dann *Umgebung von x*, die Menge aller innerer Punkte von M heißt *Inneres* $\overset{\circ}{M}$. *innerer Punkt* *Umgebung von x* *Inneres*
- y heißt *Berührungspunkt* von M $:\Leftrightarrow$ $\forall$ Umgebungen U von y : $U \cap M \neq \emptyset$, $\overline{M}$:= Menge aller Berührungspunkte von M heißt *Abschluß* von M. *Berührungspunkt* *Abschluß*
- $M \subseteq X$ heißt *dicht* in X, falls $\overline{M} = X$. *dicht*

konvergent gegen x
Cauchy–Folge
vollständig

- $(x_n)_n \subseteq X$ heißt *konvergent gegen x* $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\varepsilon : d(x_n, x) < \varepsilon$
- $(x_n)_n$ heißt *Cauchy–Folge* $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N_\varepsilon : d(x_n, x_m) < \varepsilon$
- X heißt *vollständig* $:\Leftrightarrow$ jede Cauchy–Folge in X konvergiert.

1.4. Satz (Baire): Sei X vollständiger metrischer Raum, $\forall n \in \mathbb{N} : D_n \subseteq X$ dicht und offen. Dann ist auch $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n \subseteq X$ dicht.

1.5. Bemerkung:

(i) Andere Form des Satzes von Baire: X metrisch, vollständig, $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \subseteq X$ abgeschlossen, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = X \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \overset{\circ}{A}_n \neq \emptyset$.

(ii) Satz 1.4 gilt i.a. nicht für nicht vollständige Räume, z.B. $X := \mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$, $D_n := \mathbb{Q} \setminus \{q_n\}$ offen, dicht in $\mathbb{Q}$, aber $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n = \emptyset$.

(iii) Vollständigkeit hängt von der Metrik ab, nicht von der Konvergenz, z.B. $X = (0, 1]$, $d_1(x, y) = |x - y|$, $d_2(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$, (X, d_1) nicht vollständig, (X, d_2) vollständig und es gilt $(x_n)_n$ konvergiert bezgl. $d_1 \Leftrightarrow (x_n)_n$ konvergiert bezgl. d_2.

1.6. Definition:

stetig

- Seien (X, d) , (Y, d') metrische Räume, $f : X \to Y$ Abbildung.

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ heißt } \textit{stetig} \\ \text{in } x \in X \end{array}\right\} :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall z \in X : d(x, z) < \delta \Rightarrow d'(f(z), f(x)) < \varepsilon$$

  f heißt *stetig* $:\Leftrightarrow \forall x \in X : f$ stetig in x.

Homöomorphismus
isometrisch

- $f : X \to Y$ heißt *Homöomorphismus* $:\Leftrightarrow$ f bijektiv, f stetig, f^{-1} stetig
- $f : X \to Y$ heißt *isometrisch* $:\Leftrightarrow \forall x, z \in X : d'(f(x), f(z)) = d(x, z)$.

1.7. Lemma: Sei $f : X \to Y$, dann gilt: f stetig $\Leftrightarrow \forall : V \subseteq Y$ offen : $f^{-1} \subseteq X$ offen.

1.8. Satz: Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Vervollständigung

(i) Es existieren ein vollständiger metrischer Raum $(\hat{X}, \hat{d})$ und eine isometrische Abbildung $i : X \to \hat{X}$ mit $i(X) \subseteq \hat{X}$ dicht, $(\hat{X}, \hat{d})$ heißt *Vervollständigung* von (X, d).

(ii) Seien $(\tilde{X}, \tilde{d})$ ein vollständiger metrischer Raum und $j : X \to \tilde{X}$ isometrisch mit $j(X) \subseteq \hat{X}$ dicht, dann existiert ein $f : \tilde{X} \to \hat{X}$ bijektiv, isometrisch mit $f \circ j = i$.

2. Topologische Räume

Topologie

2.1. Definition: Sei $X \neq \emptyset$ Menge, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *Topologie* auf X, falls gilt:

(O$_1$) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(O$_2$) I Menge, $\forall \iota \in I : U_\iota \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup\limits_{\iota \in i} U_i \in \mathcal{T}$

(O$_3$) $n \in \mathbb{N}$, $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap\limits_{j=1}^{n} U_j \in \mathcal{T}$

$(X, \mathcal{T})$ heißt *topologischer Raum*, die Mengen in $\mathcal{T}$ heißen *offen*, $A \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, falls $X \setminus A \in \mathcal{T}$.

topologischer Raum
offen
abgeschlossen

Seien $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ zwei Toplogien. $\mathcal{T}$ heißt *feiner* (*gröber*), falls $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ ($\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$).

feiner
gröber

2.2. Lemma: Für das System $\mathcal{A}$ der abgeschlossenen Mengen gilt:

(A$_1$) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$

(A$_2$) I Menge, $\forall \iota \in I : A_\iota \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap\limits_{\iota \in i} A_i \in \mathcal{A}$

(A$_3$) $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$

2.3. Beispiel:

(i) (X, d) metrischer Raum, dann ist $\mathcal{T}_d := \{U \subseteq X : \forall x \in U : \exists \delta_x > 0 : \bigcup\limits_{x \in U} B_d(x, \delta_x) = U\}$ eine Topologie.

(ii) $X \neq \emptyset$, $\{\emptyset, X\}$ ist die *triviale Topologie* (gröbste Topologie auf X).

triviale Topologie

(iii) X unendlich, $\mathcal{T} := \{M \subseteq X : X \setminus M$ endlich $\} \cup \{\emptyset\}$ heißt *endliche Enden–Topologie*.

endliche Enden–Topologie

2.4. Definition: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, sei $x \in X$, $U \subseteq X$ heißt *Umgebung* von X, falls $\exists V \in \mathcal{T} : x \in V \subseteq U$.

Umgebung

$\mathfrak{U}(x)$ sei das System aller Umgebungen von X (*Umgebungssystem* von X).

Umgebungssystem

2.5. Lemma (Eigenschaften der Umgebungssysteme): Es gelten:

(V$_1$) $U \in \mathfrak{U}(x)$, $U \subseteq V \Rightarrow V \in \mathfrak{U}(x)$

(V$_2$) $U_1, \ldots, U_n \in \mathfrak{U}(x) \Rightarrow \bigcap\limits_{j=1}^{n} U_j \in \mathfrak{U}(x)$

(V$_3$) $\forall U \in \mathfrak{U}(x) : x \in U$

(V$_4$) $U \in \mathfrak{U}(x) \Rightarrow \exists V \in \mathfrak{U}(x) : V \subseteq U \wedge \forall y \in V : V \in \mathfrak{U}(y)$

2.6. Lemma: Sei $X \neq 0$, zu jedem $x \in X$ sei ein System $\mathfrak{U}(x) \neq \emptyset$ von Teilmengen von X mit (V_1)–(V_4) gegeben. Dann existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, so daß $\forall x \in X : \mathfrak{U}(x)$ ist die Menge der Umgebungen von x bezgl. $\mathcal{T}$.

2.7. Definition: Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, $A \subseteq X$

Berührungspunkt

- $x \in X$ heißt *Berührungspunkt* von $A :\Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{U}(x) : U \cap A \neq \emptyset$.

Häufungspunkt
Abschluß

- $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* von $A :\Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{U}(x) : U \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$, $\overline{A}$:= Menge der Berührungspunkte heißt *Abschluß* von A.

innerer Punkt
Inneres

- $x \in A$ heißt *innerer Punkt* $:\Leftrightarrow A \in \mathfrak{U}(x)$, $\mathring{A}$:=Menge der inneren Punkte heißt *Inneres* von A.

Randpunkt

- $x \in X$ heißt *Randpunkt* von $A :\Leftrightarrow x \in \overline{x} \wedge x \in \overline{X \setminus A}$.

2.8. Lemma:

(i) $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossenen Menge, die A enthält, weiter gilt $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $A = \overline{B} \Leftrightarrow A$ abgeschlossen

(ii) Sei $\bar{\cdot} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(x)$ eine Abbildung mit den Eigenschaften $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ und $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Dann existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, so daß $\forall A \subseteq X : \overline{A} =$ Abschluß von A bezgl. $\mathcal{T}$.

2.9. Lemma:

(i) $\mathring{A}$ ist die größte offene Menge, die in A enthalten ist.

(ii) $(\mathring{A})^\circ = \mathring{A}$, $A \subseteq B \Rightarrow \mathring{A} \subseteq \mathring{B}$, $A = \mathring{A} \Leftrightarrow A$ offen, $\mathring{A} \cap \mathring{B} = (A \cap B)^\circ$.

(iii) $X \setminus \mathring{A} = \overline{X \setminus A}$ und $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$

(iv) $\mathrm{Rand}\, A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \mathrm{Rand}(X \setminus A)$

(v) $x \in \overline{A} \setminus A \Rightarrow x$ Häufungspunkt von A, d.h. $\overline{A} = A \cup \{\text{Häufungspunkte}\}$.

2.10. Definition: Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum.

Basis

- $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{T}$ heißt *Basis* von $\mathcal{T} :\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{T} : U$ ist Vereinigung von Mengen aus $\mathfrak{B}$.

Subbasis

- $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{T}$ heißt *Subbasis*, falls die Menge der endlichen Durchschnitte von Mengen aus $\mathfrak{S}$ eine Basis bilden.

offene Umgebungsbasis

- Zu $x \in X$ heißt ein System $\mathfrak{B}(x) \subseteq \mathcal{T}$ eine *offene Umgebungsbasis* von $x :\Leftrightarrow \mathfrak{B}(x) \subseteq \mathfrak{U}(x) \wedge \forall U \in \mathfrak{U}(x) : \exists B \in \mathfrak{B}(x) : B \subseteq U$.

Umgebungsbasis

- Allgemeiner: $\mathfrak{B}(x)$ heißt *Umgebungsbasis* von $x :\Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{U}(x) : \exists B \in \mathfrak{B}(x) : B \subseteq U$.

2.11. Lemma:

(i) Sei $\mathcal{T}$ Topologie auf X und $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{T}$. Dann gilt:
$\mathfrak{B}$ ist Basis von $\mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in X, U \in \mathfrak{U}(x) : \exists B \in \mathfrak{B} : x \in B \subseteq U$.

(ii) Sei $\mathfrak{B} \in \mathcal{P}(X)$. Dann ist $\mathfrak{B}$ Basis einer Topologie $\mathcal{T}$ auf $X \Leftrightarrow \forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B}, x \in B_1 \cap B_2 : \exists B \in \mathfrak{B} : x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

2.12. Definition: Sei $(X, \mathcal{T})$ topologische Raum, $Y \subseteq X$. $\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$ heißt die von $\mathcal{T}$ auf Y *induzierte Topologie*, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ heißt *Unterraum* oder *Teilraum*. *induzierte Topologie* *Unterraum* *Teilraum*

2.13. Lemma: Für einen Teilraum Y von $(X, \mathcal{T})$ gelten:

(i) $A \subseteq Y$ ist abgeschlossen in $Y \Leftrightarrow A = B \cap Y$ für ein $B \subseteq X$ abgeschlossen

(ii) $M \subseteq Y \Rightarrow \underbrace{\overline{M}}_{\mathcal{T}_Y} = \underbrace{\overline{M}}_{\mathcal{T}} \cap Y$

(iii) $y \in Y,\ V \subseteq Y,\ y \in V$: $V \in \mathfrak{U}_Y(y) \Leftrightarrow V = U \cap Y$ für ein $U \in \mathfrak{U}_X(y)$.

(iv) $y \in Y$, $\mathfrak{B}(y)$ Umgebungsbasis von y in $X \Rightarrow \mathfrak{B}(y) \cap Y$ ist Umgebungsbasis von y in Y.

(v) $\mathfrak{B}$ Basis (Subbasis) für $\mathcal{T} \Rightarrow \mathfrak{B} \cap Y$ ist Basis (Subbasis) für $\mathcal{T}_Y$.

(vi) $\mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T} \Leftrightarrow Y$ offen in X und $\mathcal{A}_Y \subseteq \mathcal{A} \Leftrightarrow Y$ abgeschlossen in X.

3. Stetigkeit und Konvergenz

3.1. Definition: Seien X, Y topologische Räume, $f : X \to Y$.

- f heißt *stetig in* x $:\Leftrightarrow \forall x \in X : f^{-1}(\mathfrak{U}(f(x))) \subseteq \mathfrak{U}(x)$ *stetig in x*
  f heißt *stetig* $:\Leftrightarrow \forall x \in X : f$ stetig in x *stetig*
- f heißt *offen* (*abgeschlossen*) $:\Leftrightarrow \forall U \subseteq X$ offen (abgeschlossen) : $f(U)$ offen (abgeschlossen). *offen* *abgeschlossen*
- f heißt *Homöomorphismus* $:\Leftrightarrow f$ biijektiv, $f : X \to Y$ stetig, $F^{-1} : Y \to X$ stetig *Homöomorphismus*
- X, Y heissen *homöomorph* $:\Leftrightarrow \exists f : X \to Y$: f ist Homöomorphismus *homöomorph*
- $f : X \to Y$ heißt *Einbettung* $:\Leftrightarrow f : X \to f(X)$ ist ein Homöomorphismus. *Einbettung*

3.2. Lemma:

(i) $f : X \to Y$ stetig in x, $g : Y \to Z$ stetig in $f(x) \Rightarrow g \circ f : X \to Z$ stetig in x.

(ii) f, g stetig (offen, abgeschossen) $\Rightarrow g \circ f$ stetig (offen, abgeschlossen)

(iii) $f : X \to Y$ stetig, $M \subseteq X \Rightarrow f\big|_M : M \to Y$ stetig

(iv) $f : X \to Y$ stetig, $M \subseteq Y$ mit $f(X) \subseteq M \Rightarrow f : X \to M$ stetig.

3.3. Lemma: Für $f : X \to Y$ sind äquivalent:

(i) f stetig
(ii) $\forall A \subseteq X : f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$
(iii) $\forall B \subseteq Y : \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$
(iv) $\forall C \subseteq Y$ abgeschlossen: $f^{-1}(C)$ abgeschlossen
(v) $\exists$ Subbasis $\mathcal{T}$ von Y mit $f^{-1}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{T}_X$

3.4. Lemma: Seien X, Y topologische Räume, $f : X \to Y$ Abbildung.

(i) f abgeschlossen $\Leftrightarrow \forall A \subseteq X : \overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$
(ii) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
  (1) f offen
  (2) $f(\mathring{A}) \subseteq (f(A))^\circ$
  (3) $\exists \mathfrak{B}$ Basis der Topologie auf X mit $\forall B \in \mathfrak{B} : f(B) \subseteq Y$ offen
  (4) $\forall x \in X, U \in \mathcal{U}(x) : f(u) \in \mathcal{U}(f(x))$
(iii) Sei f bijektiv. Dann sind äquivalent:
  (1) f ist ein Homöomorphismus
  (2) f ist stetig und abgeschlossen
  (3) f ist stetig und offen
  (4) $\forall A \subseteq X : f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$

3.5. Lemma: Seien $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ und $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ Abbildungen. Dann gelten:

(i) sei $g \circ f$ offen, f stetig und surjektiv $\Rightarrow g$ offen
(ii) sei $g \circ f$ abgeschlossen, f stetig und surjektiv $\Rightarrow g$ abgeschlossen
(iii) sei $g \circ f$ offen, g stetig und injektiv $\Rightarrow f$ offen
(iv) sei $g \circ f$ abgeschlossen, g stetig und injektiv $\Rightarrow f$ abgeschlossen

Konvergenz

3.6. Definition: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologische Raum, $(x_n)_n \subseteq X$ eine Folge, $x \in X$. Dann *konvergiert* $(x_n)_n$ gegen $x :\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x) : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x_n \in U$.

3.7. Bemerkung: Der Konvergenzbegriff für Folgen hat in beliebigen topologischen Räumen i.a. **nicht** die folgenden Eigenschaften, die in metrischen Räumen gelten:

- $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (x_n)_n \subseteq A : x_n \to x$
- f stetig in $x \Leftrightarrow \forall (x_n)_n \subseteq X : x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$

3.8. Definition: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologische Raum, sei $(I, \leq)$ eine geordnete Menge.

- $(X, \mathcal{T})$ heißt *Hausdorff–Raum* (*T_2–Raum*) $:\Leftrightarrow \forall x, y \in X : \exists U, V \in \mathcal{T} : x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset$. *Hausdorff–Raum* *$T_2$–Raum*
- $(I, \leq)$ heißt *nach oben gerichtet* $:\Leftrightarrow \forall i_1, i_2 \in I : \exists i \in I : i \geq i_1, i_2$. *nach oben gerichtet*
- sei $X \neq \emptyset$. Ein *Netz* in X ist eine Abbildung $I \to X : \iota \mapsto x_\iota$. Sei $\Lambda \subseteq I$ nach oben gerichtet, dann heißt die Komposition $\Lambda \to I \to X : \lambda \mapsto L_\lambda \mapsto X_{\iota_\lambda}$ ein *Teilnetz*, falls $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda : \lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow L_{\lambda_1} < L_{\lambda_2}$ und $\forall \iota \in I : \exists \lambda \in \Lambda : \iota_\lambda \geq \iota$. *Netz* *Teilnetz*
- Sei $(x_\iota)_{\iota \in I}$ ein Netz. $(x_\iota)_{\iota \in I}$ *konvergiert gegen x* $:\Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{U}(x) : \exists i(U) \in I : \forall \iota \in I, \iota \geq i(U) : x_\iota \in U$. *Netz–Konvergenz*

3.9. Lemma: Sei X ein topologische Raum.

(i) Für $A \subseteq X$ und $x \in X$ gilt:

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists \text{ Netz } (x_\iota)_{\iota \in I} \subseteq A \text{ mit } x_\iota \to x$$

(ii) sei Y topologische Raum, $x \in X$, $F : X \to Y$. Dann gilt:

$$f \text{ stetig in } x \Leftrightarrow (\forall \text{ Netz } (x_\iota)_{\iota \in I} \to x \Rightarrow (f(x_\iota))_{\iota \in I} \to f(x))$$

4. Erzeugung von topologischen Räumen

4.1. Satz: Seien $X \neq \emptyset$, Λ Menge, $\forall \lambda \in \Lambda : (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ topologische Räume, $f_\lambda : X \to X_\lambda$ Abbildungen. Sei $\mathfrak{S} := \{f_\lambda^{-1}(U_\lambda) : U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, sei $\mathfrak{B}$ die Menge aller endlicher Durchschnitte von Mengen aus $\mathfrak{S}$. Dann gelten:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_\lambda"] & X_\lambda \\ Z \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "f_\lambda \circ g"'] & \end{tikzcd}$$

(i) $\mathfrak{B}$ ist Basis ein Topologie $\mathcal{T}$ auf X.

(ii) $\mathcal{T}$ hat die universelle Eigenschaft: $\forall Z$ topologischer Raum $: \forall g : Z \to Y : g$ stetig $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda : f_\lambda \circ g$ stetig.

(iii) Sei $\forall \lambda \in \Lambda : \mathfrak{B}_\lambda$ Basis von $\mathcal{T}_\lambda$, $\mathfrak{S}' := \{f_\lambda^{-1}(U_\lambda) : U_\lambda \in \mathfrak{B}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, sei $\mathfrak{B}'$ die Menge aller endlichen Durchschnitte von Mengen aus $\mathfrak{S}'$. Dann ist $\mathfrak{B}'$ eine Basis von $\mathcal{T}$.

4.2. Definition: $\mathcal{T}$ aus Satz 4.1 heißt *Initialtopologie* auf X bezgl. $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda, f_\lambda)$. *Initialtopologie*

4.3. Spezialfälle (Initialtopologien):

(i) $X \neq \emptyset$, $(Y,\mathfrak{T})$ topologischer Raum, $F : X \to Y$ Abbildung. Die Initialtopologie auf X bezgl. $(Y,\mathfrak{T},f)$ ist $f^{-1}(\mathfrak{T}) := \{f^{-1}(U) : U \subseteq Y \text{ offen }\}$ und heißt *Urbild* von $\mathfrak{T}$ unter f.

Urbild

(ii) Seien Λ Menge, $\forall\lambda \in \Lambda : (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ topologische Räume, sei $X = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ das kartesische Produkt, seien $\forall\lambda \in \Lambda : p_\lambda : X \to X_\lambda : x \mapsto x_\lambda$ die Projektionen.
Die Initialtopologie auf X bezgl. $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda, p_\lambda)$ heißt *Produkttopologie* auf $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.

Produkttopologie

(iii) Seien $X \neq \emptyset$, Λ Indexmenge, $\forall\lambda \in \Lambda : \mathcal{T}_\lambda$ Topologie auf X, seien $\forall\lambda \in \Lambda : i_\lambda : X \to (X, \mathcal{T}_\lambda)$ die Identitäten. Die Initialtopologie $\mathcal{T}$ auf X enthält alle $\mathcal{T}_\lambda$ und heißt *Supremum* der $\mathcal{T}_\lambda$.

Supremum

(iv) Seien $X \neq \emptyset, \mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\forall S \subseteq \mathfrak{T}$: $\mathcal{T}_S = \{\emptyset, X, S\}$, sei $\mathcal{T}$ das Supremum der $\mathcal{T}_S$, dann gilt $\forall S \in \mathfrak{T}$: $S \in \mathcal{T}$, $\mathcal{T}$ heißt *erzeugte Topologie* und ist die gröbst Topologie auf X, die $\mathfrak{T}$ enthält.

erzeugte Topologie

4.4. Bemerkung (Produkttopologie):

(i) Eine Basis der Produkttopologie $\mathcal{T}$ auf $X = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ ist

$$\begin{aligned}&\left\{\bigcap_{j=1}^{n} p_{\lambda_j}^{-1}(U_{\lambda_j}) : U_{\lambda_j} \in \mathcal{T}_{\lambda_j}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda\right\}\\ &= \{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} : x_{\lambda_j} \in U_{\lambda_j} : U_{\lambda_j} \in \mathcal{T}_{\lambda_j}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda\} = \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\end{aligned}$$

mit $U_\lambda = \begin{cases} U_{\lambda_j} & \text{falls } \lambda = \lambda_j \\ X_\lambda & \text{sonst} \end{cases}$

(ii) Seien $X = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ mit Produkttopologie, $\forall\lambda \in \Lambda : A_\lambda \subseteq X_\lambda$, $A = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Dann ist die Produkttopologie auf A zu der jeweils auf A_λ induzierten Topologien gleich der auf $A \subseteq X$ von der Produkttopologie auf X induzierten.

(iii) $\forall\lambda \in \Lambda : p_\lambda : X \to X_\lambda$ ist offen

4.5. Lemma: Seien Λ Indexmenge, $X = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, $\forall\lambda \in \Lambda : A_\lambda \subseteq X_\lambda$, $A = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.

Dann gilt $\overline{A} = \overline{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$.

Insbesondere gilt: $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ abgeschlossen $\Leftrightarrow \forall\lambda\Lambda : A_\lambda \subseteq X_\lambda$ abgeschlossen.

4.6. Lemma: Seien Λ Indexmenge, $\forall\lambda\in\Lambda: X_\lambda, Y_\lambda$ topologische Räume, $f_\lambda: X_\lambda\to Y_\lambda$ Abbildung. Sei $f:\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda\to\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda:(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\mapsto(f_\lambda(x_\lambda))_\lambda$. Dann gilt:

$$f \text{ stetig in } x=(x_\lambda)_\lambda \Leftrightarrow \forall\lambda\in\Lambda: f_\lambda \text{ stetig in } x_\lambda$$

4.7. Lemma: Seien Λ Indexmenge, $\forall\lambda\in\Lambda: X_\lambda$ topologischer Raum, I Indexmenge, $\{\Lambda_\iota:\iota\in I\}$ eine Partition von Λ, $\forall\iota\in I: Y_\iota=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda_\iota}X_\lambda$, $X=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$, $Y=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda$.
Dann ist $\varphi: X\to Y:(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\mapsto((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_\iota})_{\iota\in I}$ ein Homöomorphismus.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "g"'] & & X_\lambda \arrow[ll, "f_\lambda"'] \arrow[dl, "g\circ f_\lambda"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

4.8. Satz: Seien $X\neq\emptyset$, Λ Indexmenge, $\forall\lambda\in\Lambda:(X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda)$ topologischer Raum, $f_\lambda: X_\lambda\to X$ Abbildung. Dann gibt es genau eine Topologie $\mathcal{T}$ mit

$$\forall Z \text{ topologischer Raum }:\forall g: X\to Z: g \text{ stetig } \Leftrightarrow \forall\lambda\in\Lambda: g\circ f_\lambda \text{ stetig}$$

4.9. Definition: $\mathcal{T}$ aus Satz 4.8 heißt *Finaltopologie* auf X bezgl. $(X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda,f_\lambda)$. *Finaltopologie*

4.10. Spezialfälle (Finaltopologie):

(i) Seien $(X,\mathcal{T})$ topologischer Raum, $\sim$ Äquivalenzrelation, $X/_\sim$ Quotientenraum (Menge der Äquivalenzklassen), $q: X\to X/_\sim: x\mapsto[x]$. Die Finaltopologie auf $X/_\sim$ bezgl. $(X,\mathcal{T},q)$ heißt *Quotiententopologie* auf $X/_\sim$, es gilt: *Quotiententopologie*
$V\subseteq X/_\sim$ offen $\Leftrightarrow q^{-1}(V)$ offen in X.

(ii) X Menge, Λ Indexmenge, $\forall\lambda\in\Lambda:\mathcal{T}_\lambda$ Topologien auf X, $f_\lambda=\mathrm{id}_\lambda:(X,\mathcal{T}_\lambda)\to(X,\mathcal{T})$, $V\in\mathcal{T}\Leftrightarrow\forall\lambda\in\Lambda: V\in\mathcal{T}_\lambda$, $\mathcal{T}=\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{T}_\lambda$, $\mathcal{T}$ heißt *Infimum* der $\mathcal{T}_\lambda$. *Infimum*

(iii) Λ Indexmenge, $(X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda)$ topologische Räume, X_λ paarweise disjunkt (sonst statt $X_\lambda: X_\lambda\times\{\lambda\}$), $X=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$, $\forall\lambda\in\Lambda: f_\lambda: X_\lambda\to X$ die Inklusionsabbildung.
Die Finaltopologie $\mathcal{T}$ auf X bezgl. der $(X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda,f_\lambda)$ heißt die *Summe der Topologien*, $(X,\mathcal{T})$ heißt die *topologische Summe* der $(X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda)$. *Summe der Topologien* *topologische Summe*

(iv) X,Y topologische Räume, $A\subseteq X$, $f: A\to Y$ injektiv, Äquivalenzrelation $\sim$: $x\in X\setminus A\Rightarrow x\sim x$, $y\in Y\setminus f(A)\Rightarrow y\sim y$, $a\in A\Rightarrow a\sim f(a)$, $b\in f(A)\Rightarrow b\sim f^{-1}(b)$.
Der Quotientenraum $X\cup_f Y:=X\cup Y/_\sim$ heißt der durch *Zusammenkleben* von X und Y (vermöge f) entstandende topologischer Raum. *Zusammenkleben*

4.11. Bemerkung:

(i) Seien X, Y topologische Räume, $\sim$ Äquivalenzrelation, $X/_\sim$ Quotientenraum, $q : X \to X/_\sim$ Quotientenabbildung, $f : X/_\sim \to Y$ Abbildung.
Dann gilt f stetig $\Leftrightarrow f \circ q : X \to Y$ stetig.

(ii) $f : X \to Y$ Abbildung, falls f konstant auf $\bigcup\limits_{t \in X/_\sim} q^{-1}(t)$, dann kann $\tilde{f} : X/_\sim \to Y$ durch $\overline{f}(t) := f(x)$ für irgendein $x \in q^{-1}(t)$ ersetzt werden.
Dann gilt: f stetig $\Leftrightarrow$ $\overline{f}$ stetig.

(iii) $f : X \to Y$ stetig, surjektiv, $\sim$ Äquivalenzrelation mit $x_1 \sim x_2 :\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$, $X/_\sim$ Quotientenraum, $q : X \to X/_\sim \leftrightarrow Y$, $\tilde{f} : [x] \mapsto f(x)$ wohldefiniert, bijektiv und stetig (wegen $f)\tilde{f} \circ q$. Dann gilt: $\tilde{f}$ ist ein Homöomorphismus $\Leftrightarrow$ Topologie $\mathcal{T}_Y$ ist die Finaltopologie bez. f.

4.12. Beispiel:

(i) $X = [0,1]^2$, für $x \in (0,1)$ sei (x,t) nur zu sich selber äquivalent, für $x = 0$: $\forall s, t \in [0,1] : (0,t) \sim (1, 1-t) \wedge (1,s) \sim (0, 1-s)$, Quotientenraum $X/_\sim = [0,1]^2/_\sim$ heißt *Möbius–Band* („einfachste“ nicht orientierbare „2–dim.“ Fläche).

Möbius–Band

(ii) $X = \mathbb{R}$, $\sim$ auf $\mathbb{R}$ durch $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{R}/_\sim = \{x + \mathbb{Z} : x \in [0,1)\}$, sei $\varphi : \mathbb{R} \to S := \{y \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\} : t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ (1–Sphäre). Dann ist der Quotientenraum homöomorph zu S_1, da φ stetig und offen.

5. Zusammenhang

5.1. Definition: Sei X ein topologischer Raum.

zusammenhängend

X heißt *zusammenhängend* $:\Leftrightarrow \forall U, V$ offen, $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset \Rightarrow U = \emptyset \vee V = \emptyset$

(X kann nicht als disjunkte Vereinigung von zwei nicht leeren offenen Mengen geschrieben werden kann).

$A \subseteq X$ heißt zusammenhgd $:\Leftrightarrow \forall U, V$ offen, $A \subseteq U \cup V, U \cap V = \emptyset \Rightarrow U \cap A = \emptyset \vee V \cap A = \emptyset$

(A zusammenhängend mit induzierter Topologie)

5.2. Bemerkung: Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) X zusammenhängend

(ii) $\forall A, B$ abgeschlossen, $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$

(iii) $X, \emptyset$ sind die einzigen offenen und abgeschlossenen Teilmengen von X.

5.3. Lemma:

(i) $A \subseteq X$ zusammenhängend, $A \subseteq B \subseteq \overline{A} \Rightarrow B$ zusammenhängend

(ii) I Indexmenge, $\forall \iota \in I : A_\iota$ zusammenhängende Teilmengen von X mit $\bigcap\limits_{\iota \in I} A_\iota \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup\limits_{\iota \in I} A_\iota$ zusammenhängend

(iii) $n \in \mathbb{N}$, $\forall j \in \{1, \dots, n\} : A_j$ zusammenhängend, $\forall j \in \{1, \dots, n-1\} : A_j \cap A_{j+1} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j$ zusammenhängend

(iv) X zusammenhängend, $f : X \to Y$ stetig, $f(X) \subseteq Y$ zusammenhängend

5.4. Satz: Die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle.

5.5. Satz: Sei X topologischer Raum, zusammenhängend, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, seien $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) \leq f(x_2)$. Dann gilt: $[f(x_1), f(x_2)] \subseteq f(X)$.

5.6. Definition: Seien X topologischer Raum, $\emptyset \neq M \subseteq X$, M zusammenhängend. Dann ist die *größte zusammenhängende Teilmenge* von X, die M enthält:

größte zshgde Teilmenge

$$\bigcup_{\substack{M \subseteq A \subseteq X \\ A \text{ zshgd.}}}$$

Sei $x \in X$, die größte zusammenhängende Teilmenge $K(x)$, die x enthält, heißt *Zusammenhangskomponente* von x (oder *Komponente*).

Zusammenhangs-komponente

Komponente

5.7. Eigenschaften:

- Jede größte zusammenhängende Teilmenge ist abgeschlossen.
- Sei $x \in X$ und $x \in A \subseteq X$ abgeschlossen und offen. Dann gilt $K(x) \subseteq A$.
- Sei $x \in X$ und $x \in M \subseteq X$ zusammenhängend. Dann gilt: $M \subseteq K(x)$, da $M \cup K(x)$ auch zusammenhängend.
- Seien K_1, K_2 Zusammenhangskomponenten von X mit $K_1 \neq K_2$. Dann gilt: $K_1 \cap K_2 = \emptyset$.

$\Rightarrow$ X zerfällt in seine Zusammenhangskomponenten *lokal zusammenhängend*

5.8. Definition: Sei X topologischer Raum.

$$\left.\begin{array}{c}X \text{ heißt } \textit{lokal} \\ \textit{zusammenhängend}\end{array}\right\} :\Leftrightarrow \forall x \in X, U \in \mathfrak{U}(x) : \exists V \in \mathfrak{U}(x) : V \subseteq U \wedge V \text{ zusammenhgd.}$$

5.9. Lemma:

(i) Jeder Punkt in X hat zusammenhängende Umgebung $\Rightarrow$ Komponenten von X offen.

(ii) X lokal zusammenhängend $\Leftrightarrow \forall U \subseteq X$ offen : Komponenten von U offen in X.

(iii) X lokal zusammenhängend $\Leftrightarrow$ Jeder Punkt aus X hat eine Umgebungsbasis aus offenen, zusammenhängenden Mengen.

Weg
Anfangspunkt
Endpunkt
geschlossen
wegzusammenhängend
lokal wegzusammenhängend

5.10. Definition: Sei X topologischer Raum. Eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$ heißt *Weg* in X, $\gamma(0)$ heißt *Anfangspunkt*, $\gamma(1)$ *Endpunkt*.

Ein Weg γ heißt *geschlossen*, falls $\gamma(0) = \gamma(1)$.

$$\left.\begin{array}{c}X \text{ heißt } \textit{weg-} \\ \textit{zusammenhängend}\end{array}\right\} :\Leftrightarrow \forall x, y \in X : \exists \text{ Weg } \gamma : \gamma(0) = x \wedge \gamma(1) = y$$

$$\left.\begin{array}{c}X \text{ heißt } \textit{lokal weg-} \\ \textit{zusammenhängend}\end{array}\right\} :\Leftrightarrow \forall x \in X, U \in \mathfrak{U}(x) : \exists V \in \mathfrak{U}(x) : V \subseteq U \wedge V \text{ wegzshgd.}$$

5.11. Lemma:

(i) X wegzusammenhängend $\Rightarrow$ X zusammenhängend

(ii) X wegzusammenhängend, $f : X \to Y$ stetig $\Rightarrow$ $f(X)$ wegzusammenhängend

(iii) I Indexmenge, $\forall \iota \in I : A_\iota$ wegzshgd, $\bigcap\limits_{\iota \in I} A_\iota \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup\limits_{\iota \in I} A_\iota$ wegzusammenhängend

(iv) $n \in \mathbb{N}$, $\forall j \in \{1, \ldots, n\} : A_j$ wegzshgd, $\forall j \in \{1, \ldots, n-1\} : A_j \cap A_{j+1} \neq \emptyset$
$\Rightarrow \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j$ wegzshgd.

5.12. Beispiel: Sei $X = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\} \cup \{(0,0)\}$, X ist zusammenhängend, da $Y = X \setminus \{(0,0)\}$ wegzusammenhängend, also auch zusammenhängend und $Y \subseteq X \subseteq \overline{Y} = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\} \cup \{(0,t) : -1 \leq t \leq 1\}$.

X ist nicht wegzusammenhängend, also gilt: zusammenhängend $\not\Rightarrow$ wegzshgd,

$\overline{Y}$ ist nicht wegzusammenhängend, also gilt: Y wegzshgd $\not\Rightarrow \overline{Y}$ wegzshgd.

5.13. Definition: Sei X topologischer Raum, $\emptyset \neq M \subseteq X$, M wegzusammenhängend. Dann ist die *größte wegzusammenhängende Teilmenge* von X, die M enthält: *größte wegzshgde Teilmenge*

$$\bigcup_{\substack{M \subseteq A \subseteq X \\ A \text{ wegzshd.}}} A$$

Sei $x \in X$. Die größte wegzusammenhängende Teilmenge $K_W(x)$ von X, die x enthält, heißt *Wegkomponente* von x. *Wegkomponente*

5.14. Lemma:

(i) Jeder Punkt $x \in X$ hat wegzshgd. Umgebung $\Rightarrow$ Wegkomponenten in X sind offen.

(ii) X ist lokal wegzshgd $\Leftrightarrow \forall U \subseteq X$ offen sind die Wegkomponenten von U offen in X.

(iii) X ist lokal wegzshgd $\Leftrightarrow$ Jeder Punkt $x \in X$ hat ein Umgebungsbasis aus offenen, wegzshgd. Mengen.

(iv) Jeder Punkt $x \in X$ hat eine wegzshgd. Umgebung $\Rightarrow$ Komponenten und Wegkomponenten stimmen überein.

5.15. Beispiel:

(i) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, seien $x, y \in C$, $\gamma : [0,1] \to C : t \mapsto x + t(y-x)$, $\gamma([0,1]) \subseteq C$ (da C konvex) $\Rightarrow \gamma$ ist ein Weg, der x und y verbindet $\Rightarrow C$ ist wegzusammenhängend.

(ii) Sei $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist wegzusammenhängend.

(iii) Sei $n \geq 1$, S^n ist wegzusammenhängend, da $\psi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n : x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ stetig, surjektiv.

(iv) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist U lokal wegzusammenhängend.

(v) Topologische Eigenschaften, die unter Homöomorphismen erhalten bleiben, kann man oft dazu benutzen, zu zeigen, daß zwei Räume nicht homöomorph sind:

Beh.: $n \geq 2$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ sind nicht homöomorph

Beweis: Annahme: $\exists \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ homöomorph $\Rightarrow \psi|_{\mathbb{R} \setminus \{\psi^{-1}(0)\}} : \mathbb{R} \setminus \{\psi^{-1}(0)\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist auch ein Homöomorphismus, Widerspruch, da $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ wegzshgd, aber $\mathbb{R} \setminus \{\text{Punkt}\}$ ist nicht wegzusammenhängend.

(vi) $X = \mathbb{R}$, Basis der Topologie $\{[a,b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$.
Dann gilt $\forall a \in \mathbb{R} : K(a) = \{a\}$.

5.16. Satz: Sei Λ Indexmenge, $\forall \lambda \in \Lambda : X_\lambda$ topologische Räume. Dann gilt:

$$X = \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{ ist (weg–) zusammenhängend} \Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda : X_\lambda \text{ ist (weg–) zusammenhängend}$$

6. Kompaktheit

6.1. Definition: Sei $(X, \mathcal{T})$ topologische Raum, $X \neq \emptyset$, $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Überdeckung — $\mathfrak{U}$ heißt *Überdeckung* $:\Leftrightarrow \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} U = X$

offen — $\mathfrak{U}$ heißt *offen* $:\Leftrightarrow \mathfrak{U} \subseteq \mathcal{T}$.

Sei $\mathfrak{U}$ Überdeckung.

Teilüberdeckung — $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{U}$ heißt *Teilüberdeckung* $:\Leftrightarrow \bigcup_{V \in \mathfrak{V}} V = X$

endliche Durchschnittseigenschaft — $\mathfrak{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ hat die *endliche Durchschnittseigenschaft* $:\Leftrightarrow \forall E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{E}\colon \bigcap_{j=1}^{n} E_j \neq \emptyset$.

6.2. Definition: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

kompakt — X heißt *kompakt* $:\Leftrightarrow \mathfrak{U}$ offene Überd. von $X \Rightarrow \exists U_1, \dots, U_n \in \mathfrak{U} : \bigcup_{j=1}^{n} U_j = X$

(jede offene Überdeckung von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung, manchmal auch quasikompakt, dann bedeutet kompakt quasikompakt und hausdorffsch).

$A \subseteq X$ heißt kompakt $:\Leftrightarrow (A, \mathcal{T}_A)$ kompakt

relativ kompakt — $A \subseteq X$ heißt *relativ kompakt* $:\Leftrightarrow \overline{A}$ kompakt

6.3. Lemma: Für $(X, \mathcal{T})$ sind äquivalent:

(i) X kompakt

(ii) $\mathfrak{A}$ Familie abgeschlossener Teilmengen von X mit endl. Durchschnittseigenschaft $\Rightarrow \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A \neq \emptyset$

6.4. Lemma:

(i) $A \subseteq X$ kompakt $\Leftrightarrow$ für jedes System $\mathfrak{U}$ von offenen Mengen in X mit $A \subseteq \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} U$ gilt $\exists U_1, \dots, U_n \in \mathfrak{U} : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_j$.

(ii) $A_1, \dots, A_m \subseteq X$ kompakt $\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{m} A_j$ kompakt

(iii) X kompakt, $A \subseteq C$ abgeschlossen $\Rightarrow A$ kompakt

(iv) $A \subseteq X$ kompakt, X Hausdorff–Raum $\Rightarrow A$ abgeschlossen in X

(v) X kompakt, $A \subseteq X \Rightarrow A$ relativ kompakt

(vi) $A_1, \dots, A_m \subseteq X$ relativ kompakt $\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ relativ kompakt

6.5. Satz: Sei X Hausdorff–Raum, $A, B \subseteq X$ kompakt mit $A \cap B = \emptyset$. Dann existieren $U, V \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$.

6.6. Lemma:

(i) $f : X \to Y$ stetig, X kompakt $\Rightarrow f(X)$ kompakt

(ii) $f : X \to Y$ stetig, X kompakt, Y Hausdorff–Raum $\Rightarrow f$ abgeschlossen. Ist f zusätzlich injektiv, so ist f eine Einbettung.

6.7. Lemma: Seien X, Y topologische Räume, $X \times Y$ Produktraum, $A \subseteq X$ kompakt, $B \subseteq Y$ kompakt. Dann existieren $U \subseteq X, V \subseteq Y$ offen mit:

$\forall \mathfrak{W} \subseteq X \times Y$ offen, $A \times B \subseteq \mathfrak{W} : A \subseteq U \wedge B \subseteq V \wedge U \times V \subseteq \mathfrak{W}$.

6.8. Satz (Tychonoff): Seien Λ Indexmenge, $\forall \lambda \in \Lambda : (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ topologische Räume, $X = \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ mit Produkttopologie. Dann gilt:

$$X \text{ kompakt } \Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda : X_\lambda \text{ kompakt}$$

6.9. Bemerkung: Sei (X, d) metrischer Raum, $\mathcal{T}_d$ zugehörige Topologie. Dann gilt: C kompakt $\Rightarrow C$ abgeschlossen, beschränkt in X. Die Umkehrung ist i.a. falsch (Gegenbeispiel $d'(x, y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, $\mathcal{T}_{d'} = \mathcal{T}_d$, dann X abgeschlossen, beschränkt, aber nicht kompakt).

6.10. Satz: X kompakt $\Leftrightarrow$ jedes Netz in X enthält ein konvergentes Teilnetz

6.11. Definition: Ein topologischer Raum X heißt *folgenkompakt*, falls jede Folge in X eine konvergente Teilfolge enthält. *folgenkompakt*

6.12. Bemerkung: I.a. gilt weder kompakt $\Rightarrow$ folgenkompakt noch folgenkompakt $\Rightarrow$ kompakt.

6.13. Satz:

(i) Sei X folgenkompakter topologischer Raum, X erfülle das 1. Abzählbarkeitsaxiom (d.h. jeder Punkt $x \in X$ hat eine abzählbare Umgebungsbasis). Dann ist X kompakt.

(ii) Sei X kompakt, X erfülle das 2. Abzählbarkeitsaxiom (d.h. die Topologie auf X hat eine abzählbare Basis). Dann ist X folgenkompakt.

ε–Netz

6.14. Definition: Sei (X, d) metrischer Raum, $\varepsilon > 0$. Dann heißt $M \subseteq X$ ein *ε–Netz*, falls gilt $\bigcap\limits_{x \in M} B(x, \varepsilon) = X$.

total beschränkt

(X, d) heißt *total beschränkt* $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists$ endl. ε–Netz.

$A \subseteq X$ heißt *total beschränkt* $:\Leftrightarrow (A, d_A)$ total beschränkt

6.15. Satz: Für metrische Räume X sind äquivalent:

(i) X vollständig, total beschränkt
(ii) X kompakt
(iii) X folgenkompakt

6.16. Lemma: Sei X metrischer Raum, $A \subseteq X$. Dann gelten:

(i) X total beschränkt $\Rightarrow A$ total beschränkt
(ii) A total beschränkt $\Rightarrow \overline{A}$ total beschränkt

6.17. Folgerung: Sei X vollständiger metrischer Raum, $A \subseteq X$. Dann gilt:

$$\overline{A} \text{ kompakt } \Leftrightarrow A \text{ total beschränkt}$$

7. Lokalkompakte Räume

7.1. Definition: Sei X topologischer Raum.

lokalkompakt

X heißt *lokalkompakt* $:\Leftrightarrow \forall x \in X : \exists U \in \mathfrak{U}(x) : U$ kompakt

(Manchmal auch lokalquasikompakt, dann ist lokalkompakt = lokalquasikompakt und T_2).

7.2. Satz: Sei X lokalkompakter T_2–Raum, $K \subseteq X$ kompakt. Dann gilt: $\forall U \in X$ offen, $K \subseteq U : \exists V \subseteq K$ offen : $K \subseteq V$ und $\overline{V} \subseteq U$ kompakt.

Insbesondere hat jeder Punkt in X eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen.

7.3. Satz:

(i) Sei X ein lokalkompakter T_2–Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen, $U \subseteq X$ offen. Dann ist $A \cap U$ lokalkompakt.
(ii) Sei X ein T_2–Raum, $Y \subseteq X$ lokalkompakt. Dann existieren $A \subseteq X$ abgeschlossen und $U \subseteq X$ offen mit $A \cap U = Y$.

7.4. Folgerung: Sei X lokalkompakter T_2–Raum. Dann sind die lokalkompakten Teilmengen von X genau die Mengen $Y = A \cap U$ mit $U \subseteq X$ offen und $A \subseteq X$ abgeschlossen.

7.5. Beispiel:

(i) $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ sind lokalkompakt, $\overline{B(x,r)}$ kompakte Umgebung von X für $r > 0$

(ii) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ist nicht lokalkompakt, da nicht offen in $\mathbb{R}$

(iii) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ mit Basis von $\mathcal{T}$ ist $\mathfrak{B} := \{[a,b) : a < b\}$ ist nicht lokal kompakt (0 hat keine kompakte Umgebung).

(iv) Satz 7.2 gilt i.a. nicht für nicht–T_2–Räume (sogar, wenn X kompakt ist)

7.6. Lemma: Sei X ein lokalkompakter Raum, $f : X \to Y$ stetig, offen. Dann ist $f(X) \subseteq Y$ lokalkompakt.

7.7. Satz: Seien Λ Indexmenge, $\forall \lambda \in \Lambda : X\lambda$ topologische Räume, $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ mit Produkttopologie. Dann gilt:

$$X \text{ lokalkompakt} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \lambda \in \Lambda : X_\lambda \text{ lokalkompakt} \\ \exists M \subseteq \Lambda \text{ endlich} : \forall \lambda \in \Lambda \setminus M : X_\lambda \text{ kompakt} \end{cases}$$

7.8. Satz: Sei X lokalkompakter T_2–Raum. Dann existiert ein kompakter Hausdorff–Raum $\widetilde{X}$ mit X ist homöomorph zu $\widetilde{X} \setminus \{\omega\}$ für ein $\omega \in \widetilde{X}$. $\widetilde{X}$ ist bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt.

7.9. Definition: Sei X lokalkompakter T_2–Raum. Der bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmte Hausdorff–Raum $\widetilde{X}$ aus 7.8 heißt *Einpunktkompaktifizierung* von X, $\widetilde{X} = X \cup \{\omega\}$, ω heißt unendlich ferner Punkt. *Einpunkt-kompaktifizierung*

7.10. Beispiel: Einpunktkompaktifizierung von $X = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$: $\widetilde{X}$ ist homöomorph zu $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ mit Homöomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \to S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\Phi(\infty) := (0, \ldots, 0, 1)$, $\Phi((x_1, \ldots, x_n)) := \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2+1}, \ldots, \frac{2x_n}{\|x\|^2+1}, \frac{\|x\|^2-1}{\|x\|^2+1}\right)$.

7.11. Anwendung von (7.10): $\forall a \in \mathbb{N}, n \geq 2 : S^n$ ist nicht homöomorph zu S^1, da $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zusammenhängend, $\forall a, b \in S^n, a \neq b : S^n \setminus \{a, b\}$ nicht zusammenhängend.

8. Die Sätze von Urysohn und Tietze (T_4–Räume)

8.1. Definition: Sei X ein topologischer Raum.

T_4–Raum

X heißt T_4–*Raum*:$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall A, B \subseteq X \text{ abg, } A \cap B = \emptyset : \exists U, V \subseteq X \text{ offen: } A \subseteq U, \\ B \subseteq V, U \cap V = \emptyset \end{cases}$

normal

Ein T_4–Raum, der gleichzeitig T_2 ist, heißt *normal*.

8.2. Bemerkung: Sei X ein topologischer Raum.

(i) X T_4–Raum $\Leftrightarrow \forall A \subseteq X$ abg., $U \subseteq X$ offen, $A \subseteq U : \exists V \subseteq X$ offen: $A \subseteq V \wedge \overline{V} \subseteq U$

(ii) X kompakter T_2–Raum $\Rightarrow X$ ist T_4–Raum (folgt aus Lemma 6.4)

(iii) $\forall A, B \subseteq X$ abg., $A \cap B = \emptyset$, $\exists f : X \to [0,1]$ stetig mit $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1 \Rightarrow X$ ist T_4–Raum.

(iv) X metrischer Raum $\Rightarrow X$ ist T_4–Raum.

8.3. Beispiel: $X = \mathbb{R}$, $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \mathfrak{B}(x) := \{(x-\delta, x+\delta) : \delta > 0\}$, $\mathfrak{B}(0) := \{-\delta, \delta) \setminus A : \delta > 0\}$. Dann ist $\bigcup\limits_{x \in \mathbb{R}} \mathfrak{B}(x)$ Basis einer Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}$, $(X, \mathcal{T})$ ist kein T_4–Raum.

8.4. Satz (Urysohn): Sei X ein topologischer Raum.

X ist T_4–Raum $\Leftrightarrow \forall A, B \subseteq X$ abg.$, A \cap B = \emptyset : \exists f : X \to [0,1]$ stetig $: f|_A \equiv 0, f|_B \equiv 1$

8.5. Satz: Seien X ein lokalkompakter T_2–Raum, $K \subseteq X$ kompakt, $A \subseteq X$ abgeschlossen mit $K \cap A = \emptyset$. Dann existiert $f : X \to [0,1]$ stetig mit $f|_K \equiv 1$, $f|_A \equiv 0$ und Träger $f := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$ kompakt.

8.6. Lemma: Seien X ein T_4–Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen, $r > 0$, $g : A \to [-r, r]$ stetig. Dann existiert $f : X \to [-\frac{r}{3}, \frac{r}{3}]$ stetig mit $|f(a) - g(a)| \leq \frac{2}{3}r$.

8.7. Lemma: Seien X ein T_4–Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen, $g : A \to [-1,1]$ stetig. Dann existiert $f : X \to [-1,1]$ stetig mit $f|_A = g$.

8.8. Satz (Fortsetzungssatz von Tietze): Seien X ein T_4–Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $g : A \to I$ stetig. Dann existiert $f : X \to I$ stetig mit $f|_A = g$.

8.9. Bemerkung: In den Beweis des Satzes von Tietze geht der Satz von Urysohn ein. Umgekehrt folgt Urysohn aus Tietze.

9. Vollständig reguläre Räume

9.1. Definition: Sei X ein topologischer Raum.

X ist ein T_1–*Raum* $:\Leftrightarrow \forall x \in X : \{x\}$ ist abgeschlossen *T_1–Raum*

$\left.\begin{array}{c} T_1\text{–Raum } X \text{ ist} \\ \textit{vollständig regulär} \end{array}\right\} :\Leftrightarrow \forall A \subseteq X \text{ abg}, x \in X \setminus A : \exists f : X \to \mathbb{R} \text{ stetig: } f|_A \equiv 0, f(x) \neq 0$ *vollständig regulär*

9.2. Bemerkung:

(i) X normal $\Rightarrow X$ vollständig regulär (folgt aus Urysohn)

(ii) $Y \subseteq X$, X vollständig regulär $\Rightarrow Y$ vollständig regulär

9.3. Definition: Seien X ein topologischer Raum, Y ein kompakter T_2–Raum, $\varphi : X \to Y$ Einbettung. Dann heißt (Y, φ) *Kompaktifizierung* von X, falls $\overline{\varphi(X)} = Y$ gilt. *Kompaktifizierung*

Zwei Kompaktifizierungen (Y_1, φ_1), (Y_2, φ_2) heißen *äquivalent* $:\Leftrightarrow \exists$ Homöomorphismus $\varphi : Y_1 \to Y_2 : \varphi \circ \varphi_1 = \varphi_2$. *äquivalent*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & Y_1 \arrow[d, "\varphi"] \\ & Y_2 \end{tikzcd}$$

$C^{\mathbb{R}}(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$, $CB^{\mathbb{R}}(X) := \{f \in C^{\mathbb{R}} : f \text{ beschränkt}\}$ mit Supremumsnorm.

$\left.\begin{array}{c} (Y, \varphi) \text{ heißt } \textit{Stone–} \\ \textit{Čech–Kompaktifizierung} \end{array}\right\} :\Leftrightarrow \forall f \in CB^{\mathbb{R}}(X) \colon \exists \tilde{f} : Y \to \mathbb{R} \text{ stetig: } \forall x \in X : \tilde{f}(\varphi(x)) = f(x)$ *Stone–Čech–Kompaktifizierung*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

9.4. Lemma: Seien X ein T_1–Raum, Λ Indexmenge, $F = \{f_\lambda \in C^{\mathbb{R}}(X) : \lambda \in \Lambda\}$ mit $\forall x \in X, U \in \mathcal{U}(x)$ offen: $\exists f \in F : f(x) \neq 0, f|_{X \setminus U} \equiv 0$.

Dann ist $\Phi : X \to \mathbb{R}^\Lambda : x \mapsto (f_\lambda(x))_{\lambda \in \Lambda}$ eine Einbettung.

9.5. Bemerkung:

(i) Sei X ein topologiescher Raum mit einer Stone–Čech–Kompaktifizierung. Dann ist X vollständig regulär.

(ii) Sei X vollständig regulär und $F = \{f : X \to [0,1] \text{ stetig}\}$. Dann ist $X \to [0,1]^F : x \mapsto (f(x))_{f \in F}$ ein Homöomorphismus aufs Bild (und $[0,1]^F$ kompakt) nach (9.4).

9.6. Satz:

(i) Sei X vollständig regulär. Dann besitzt X eine Stone–Čech–Kompaktifizierung $(\beta(X), \varphi)$, und diese ist bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & \beta(X) \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

(ii) Sei Z ein kompakter T_2–Raum, $f : X \to Z$ stetig. Dann existiert genau eine stetige Abbildung $\tilde{f} : \beta(X) \to Z$ mit $\tilde{f} \circ \varphi = f$.

9.7. Definition: Sei A eine kommutative Algebra über $\mathbb{R}$.

Dann ist $\Delta(A)$ die Menge aller surjektiven Homöomorphismen $A \to \mathbb{R}$. mit

$\forall \varphi \in \Delta(A), a, b \in X, \lambda \in \mathbb{R}$: $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \wedge \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \wedge \varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$

Spektrum

Sei X topologischer Raum, $CB^{\mathbb{R}}(X) := \{f \in C^{\mathbb{R}} : f \text{ beschränkt}\}$ ist mit punktweiser Addition, skalarer Multiplikation und Multiplikation eine kommutattive Algebra (über $\mathbb{R}$). $\sigma(X) := \Delta(CB^{\mathbb{R}}(X))$ heißt das *Spektrum* von $CB^{\mathbb{R}}(X)$.

Versehe $\sigma(X)$ mit der Initialtopologie bezügl. den Abbildungen $\forall f \in CB^{\mathbb{R}}(X) : \sigma(X) \to \mathbb{R} : \varphi \mapsto \varphi(f)$.

9.8. Bemerkung:

(i) $U(\varphi_0, \varepsilon, f_1, \ldots, f_n) := \{\varphi \in \sigma(X) : \forall j \in \{1, \ldots, n\} : |\varphi(f_j) - \varphi_0(f_j)| < \varepsilon\}$, dann ist $\{U(\varphi_0, \varepsilon, f_1, \ldots, f_n) : \varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}, \forall j \in \{1, \ldots, n\} : f_i \in CB^{\mathbb{R}}(X)\}$ eine Umgebungsbasis von φ_0.

(ii) $\sigma(X)$ ist ein T_2–Raum

(iii) $\forall x \in X : \varphi_x : CB^{\mathbb{R}}(X) \to \mathbb{R} : f \mapsto f(x)$, dann $\forall x \in X : \varphi_x$ ist Homöomorphismus, $\forall x \in X : \varphi_x \in \sigma(X)$

9.9. Satz: Sei X ein kompakter T_2–Raum. Dann ist durch $x \mapsto \varphi_x$ (s. Bemerkung 9.8) ein Homöomorphismus zwischen X und $\sigma(X)$ definiert.

9.10. Lemma: Seien X, Y topologische Räume.

(i) Seien X und Y homöomorph mit $h : X \to Y$. Dann ist $H : CB^{\mathbb{R}}(Y) \to CB^{\mathbb{R}}(X)$ mit $H(g)(x) := g(h(x))$ ein Algebraisomorphismus.

(ii) Sei $H : CB^{\mathbb{R}}(Y) \to CB^{\mathbb{R}}(X)$ ein Algebraisomorphismus. Dann sind $\sigma(X)$ und $\sigma(Y)$ homöomorph mit $\Phi : \sigma(X) \to \sigma(Y)$, $\forall f \in CB^{\mathbb{R}}(X) : \Phi(\varphi)(f) = \varphi(fH)$.

9.11. Satz: Sei X vollständig regulär und $CB^{\mathbb{R}}(X)$ die Algebra der $\mathbb{R}$–wertigen stetigen beschränkten Funktionen auf X. Dann ist $\sigma(X) = \Delta(CB^{\mathbb{R}}(X))$ homöomorph zu $\beta(X)$ mit $\Phi : \beta(X) \to \sigma(X) : y \mapsto \varphi_y$ mit $\forall f \in CB^{\mathbb{R}}(X) : \varphi_y(f) = \tilde{f}(y)$ $(X \hookrightarrow \beta(X))$, wobei $\tilde{(f)}$ die eindeutig bestimmte „Fortsetzung“von $f \in CB^{\mathbb{R}}(X)$ auf $\beta(X)$ ist.

A. Sütterlin–Zeichensatz

a	b	c	d	e	f	g
h	i	j	k	l	m	n
o	p	q	r	s	t	u
v	w	x	y	z		

a	B	C	D	E	F	G
h	I	J	K	L	M	N
o	P	Q	R	S	T	U
V	W	X	Y	Z		

Index

T_1–Raum ... 19
T_2–Raum ... 7
T_4–Raum ... 18
ε–Netz ... 16
Überdeckung ... 14
äquivalent ... 19

A
abgeschlossen ... 1, 3, 5
abgeschlossene Kugel ... 1
Abschluß ... 1, 4
Anfangspunkt ... 12

B
Basis ... 4
Berührungspunkt ... 1, 4

C
Cauchy–Folge ... 2

D
dicht ... 1
diskrete Metrik ... 1

E
Einbettung ... 5
Einpunktkompaktifizierung ... 17
endliche Durchschnittseigenschaft .. 14
endliche Enden–Topologie ... 3
Endpunkt ... 12
erzeugte Topologie ... 8
euklidische Metrik ... 1

F
feiner ... 3
Finaltopologie ... 9
folgenkompakt ... 15
Fortsetzungssatz ... 18

G
geschlossen ... 12
größte wegzshgde Teilmenge ... 13
größte zshgde Teilmenge ... 11
gröber ... 3

H
Häufungspunkt ... 4
Hausdorff–Raum ... 7
homöomorph ... 5
Homöomorphismus ... 2, 5

I
induzierte Topologie ... 5
Infimum ... 9
Initialtopologie ... 7
innerer Punkt ... 1, 4
Inneres ... 1, 4
isometrisch ... 2

K
kompakt ... 14
Kompaktifizierung ... 19
Komponente ... 11
konvergent gegen x ... 2
Konvergenz ... 6

L
lokal wegzusammenhängend ... 12
lokal zusammenhängend ... 12
lokalkompakt ... 16

M
Möbius–Band ... 10
Metrik ... 1

N
nach oben gerichtet ... 7
Netz ... 7
Netz–Konvergenz ... 7

normal 18

O

offen 3, 5, 14
offene Kugel 1
offene Menge 1
offene Umgebungsbasis 4

P

Produkttopologie 8

Q

Quotiententopologie 9

R

Randpunkt 4
relativ kompakt 14

S

Satz von Tietze 18
Spektrum 20
stetig 2, 5
stetig in x 5
Stone–Čech–Kompaktifizierung 19
Subbasis 4
Summe der Topologien 9
Summenmetrik 1
Supremum 8
Supremumsmetrik 1

T

Teilüberdeckung 14
Teilnetz 7
Teilraum 5
Topologie 3
topologische Summe 9
topologischer Raum 3
total beschränkt 16
triviale Topologie 3

U

Umgebung 3
Umgebung von x 1
Umgebungsbasis 4
Umgebungssystem 3
Unterraum 5
Urbild 8

V

Vervollständigung 2
vollständig 2
vollständig regulär 19

W

Weg 12
Wegkomponente 13
wegzusammenhängend 12

Z

zusammenhängend 10
Zusammenhangskomponente 11
Zusammenkleben 9